

# SUR LA PERTINENCE DES MODELES THERMOCINETIQUES ET L'ESTIMATION DE LEURS CARACTERISTIQUES

J.-C. CHAMPOUSSIN

Laboratoire d'Hydraulique et Dynamique des Gaz, I.N.S.A., Bât. 302, 69621 Villeurbanne Cedex, France

(Reçu le 6 Juillet 1982 et sous forme révisée le 23 Septembre 1982)

**Résumé**—L'analyse des travaux antérieurs révèle que la limitation la plus importante dans les méthodes métrologiques de la thermocinétique réside dans l'inadaptation du modèle phénoménologique postulé au système physique réel. Une procédure est proposée, permettant de résoudre le double problème de l'estimation et de la pertinence du modèle. L'estimation non linéaire fournit simultanément les valeurs des caractéristiques thermiques tandis qu'une série de tests complémentaires permet de contrôler le biais. Plusieurs couples système-modèle sont décrits et testés. Les trois modèles choisis ont en commun une condition de flux sinusoidale sur une face plane. La procédure a été appliquée avec succès à la détermination des caractéristiques thermophysiques du Plexiglass et du fer Armco.

### NOMENCLATURE

<i>a</i>	diffusivité thermique
<i>B</i>	biais
<i>b</i>	effusivité thermique
<i>BE</i>	biais d'expérience
<i>Bf</i>	biais sur le modèle, équation (12)
<i>BLD</i>	biais de linéarisation sur $\theta$
<i>C</i>	test de cohérence
<i>c</i>	chaleur massique
<i>COR</i>	élément de la matrice des corrélations
<i>e</i>	résidu défini par l'équation (18)
<i>E</i>	espérance mathématique
<i>f</i>	variable dépendante théorique correspondant au modèle phénoménologique postulé
<i>h</i>	coefficient d'échange
<i>J</i>	matrice Jacobienne
<i>J<sub>0</sub></i>	fonction de BESSEL d'ordre zéro
<i>MC</i>	moindres carrés
<i>n</i>	nombre de points expérimentaux
<i>NI</i>	nombre de points du plan d'expérience
<i>p</i>	nombre de paramètres
<i>PEARE</i>	procédure d'estimation et d'analyse des résultats expérimentaux
<i>PSPE</i>	plan de sélection des points expérimentaux
<i>SR</i>	somme des résidus
<i>SR<sup>2</sup></i>	somme des carrés des résidus
<i>T</i>	température
<i>t</i>	temps
<i>u</i>	erreur sur <i>X</i> , équation (2)
<i>v</i>	erreur sur <i>Y</i> , équation (3)
<i>X</i>	variable indépendante mathématique
<i>x</i>	variable indépendante mesurée
<i>Y</i>	variable dépendante expérimentale
<i>y</i>	variable dépendante mesurée
<i>z</i>	écart défini par l'équation (6)

$\zeta$	abscisse
$\eta$	modèle vrai inconnu
$\theta$	caractéristique thermophysique (paramètre ou propriété)
$\lambda$	conductivité thermique
$\rho$	rayon de l'échantillon
$\phi$	module de la densité du flux thermique
$\omega$	pulsation, équations (28)–(30)

### Symbole

valeur estimée

Les notations choisies dans l'exposé de principe correspondent à celles utilisées le plus fréquemment dans l'étude des modèles.

### 1. INTRODUCTION

L'APPROCHE classique [1]–[4] pour la mesure des caractéristiques thermocinétiques d'un solide consiste à créer des conditions expérimentales pour lesquelles le comportement du système est décrit par l'équation

$$Y = \theta \cdot g(X) \quad (1)$$

dans laquelle la valeur de *Y* est identifiée avec celle de *f*. *X* est par exemple le temps ou la fréquence,  $\theta$  le vecteur des caractéristiques recherchées (conductivité, diffusivité...) et  $f(X, \theta) = \theta \cdot g(X)$  la température calculée. Des perfectionnements ont été apportés en prenant plusieurs points dans le plan des variables [5, 6] en déterminant simultanément plusieurs paramètres, [7–10] ou en réalisant une concordance continue entre la courbe *Y(X)* et les courbes  $f(X, \theta)$  pour plusieurs valeurs de  $\theta$  [11].

Un progrès considérable a été accompli en minimisant la norme des écarts quadratiques  $\|y_i - f(x_i, \theta)\|^2$ , [12–14], mais l'effet des erreurs n'a été que partiellement étudié [15, 16]. Nous proposons une méthode d'estimation utilisable avec un modèle phénoménologique  $f(X, \theta)$  non linéaire en *X* et en  $\theta$ , et pour lequel non seulement *Y* mais également *X* peu-

### Notations grecques

$\delta$	incrément du paramètre $\theta$ , équation (10)
$\varepsilon$	erreur

vent être connus avec erreurs. Plusieurs tests complémentaires, nous permettent de contrôler le degré d'accord système-modèle. Pour cela nous avons construit un 'outil d'estimation' à la convergence de plusieurs disciplines: statistiques, mathématiques, méthodes numériques.

## 2. LIAISONS STATISTIQUES ET EXPERIENCES PHYSIQUES

Dans la situation physique étudiée les grandeurs expérimentales ( $x$  ou  $y$ ) sont liées aux grandeurs mathématiques du modèle ( $X$  ou  $Y$ ) par les équations

$$x = X + u_a + u_b, \quad (2)$$

$$y = Y + v_a + v_b \quad (3)$$

ou  $u_a$  et  $v_a$  désignent les erreurs aléatoires respectivement sur  $x$  et  $y$  et de même  $u_b$  et  $v_b$  les biais. Dans le cas où les biais de mesure sont nuls ( $u_b = v_b = 0$ ) la situation est typiquement celle de la relation fonctionnelle décrite en [17]:  $y = f(x - u_a, \theta)$ . Mais dans nos essais, nous pouvons fixer la valeur de  $x$  et observer  $y$  pour chaque  $x$  fixé, c'est le modèle statistique de Berkson [18]. Si  $u_a \ll x$  et si  $u_a$  et  $v_a$  ont les mêmes caractéristiques de dispersion des erreurs, nous sommes ramenés à un problème de régression non linéaire,

$$y = f(x, \theta) + v_a. \quad (4)$$

L'estimation de vecteur paramètre  $\theta$  peut alors être faite, en minimisant la norme du vecteur des écarts entre  $y$  et  $f$ ,

$$SR_{\min}^2 = [y - f]'[y - f]_{\min}. \quad (5)$$

Pour minimiser la fonctionnelle (5) on utilise la méthode de Gauss-Newton. Après linéarisation de la fonction  $f(x, \theta)$  par rapport aux paramètres, on obtient à chaque itération,

$$z = J \cdot \delta + \varepsilon \quad (6)$$

où

$$z = y - f(x, \theta_0) \quad (7)$$

est le vecteur des observations,

$$J = \left[ \frac{\partial f(x_i, \theta)}{\partial \theta_j} \right] \quad (8)$$

est la matrice Jacobienne [ $n \times p$ ],

$$\delta = \theta - \theta_0 \quad (9)$$

est le vecteur d'incrément, et  $\varepsilon$  est le vecteur des erreurs.

A partir du vecteur estimé initial  $\theta_0$  la translation de vecteur d'incrément  $\delta$  défini par l'estimateur MC

$$\delta = (J'J)^{-1} J'z \quad (10)$$

permet d'actualiser un nouveau point de départ d'après (9).

## 3. QUALITE DE L'ESTIMATION

Les données expérimentales peuvent s'écarter des valeurs prédites par le modèle, non seulement à cause des erreurs aléatoires, mais aussi à cause des biais de mesure et du biais sur le modèle phénoménologique 'présupposé exact'.

### 3.1. Définition des divers biais

En statistique, la qualité de l'estimation est définie par le carré de l'erreur moyenne sur les paramètres, égal à la somme d'un terme de biais et d'un terme de variance,

$$E[(\theta - \hat{\theta})^2] = B^2(\theta) + \text{Var}(\hat{\theta}). \quad (11)$$

En dehors du modèle linéaire [19], nous ne connaissons pas de résultats théoriques généraux, utilisables, permettant d'évaluer directement ces composantes. Nous savons seulement qu'à chaque itération la procédure de Gauss-Newton utilise l'estimation linéaire non biaisée de variance minimum. Aussi, nous allons plutôt définir les biais sur l'équation traduisant le modèle utilisé pour le calcul.

Pour  $X$  fixé, nous définissons d'abord le biais  $Bf$  sur la fonction  $f$  par l'équation

$$\eta(X, \varphi) = f(X, \theta) + Bf(X, \theta + \varphi). \quad (12)$$

Ce biais est généralement fonction de  $X$ . En fixant la valeur de la 'variable contrôlée  $x$ ', d'après l'hypothèse de Berkson [18]:  $X = x - (u_a + u_b)$ , les erreurs de mesure  $u_a$  et  $u_b$  sur  $x$  et la non linéarité par rapport à  $x$  induisent un biais qui sera transmis par les fonctions  $f(X, \theta)$  et  $Bf(X, \theta + \varphi)$ . A ce biais transmis, s'ajoute le biais direct  $v_b$  sur la mesure de  $Y$ . Nous avons appelé biais d'expérience la somme de ces deux biais que nous notons  $BE$ . Enfin, l'exploitation numérique de ce modèle par l'estimateur MC utilise le développement de  $f(x, \theta)$  en série de Taylor par rapport aux paramètres et la troncature au premier ordre introduit le biais  $BL\theta$ . Le biais total  $B$  se compose alors des trois biais précédents,

$$B = BL\theta + Bf + BE. \quad (13)$$

En introduisant ces divers biais supposé connus ou calculables dans l'équation (6), le vecteur  $\hat{\theta}$ , estimé d'après les observations  $y - B$ , serait alors égal au vecteur vrai  $\theta^*$ . A chaque itération, le vecteur estimé  $\hat{\theta}$  serait donné par le modèle linéarisé,

$$y - B - f(x, \theta_0) = J\delta + \varepsilon \rightarrow \hat{\theta} \sim \theta^*. \quad (14)$$

Ces divers biais étant inconnus, le modèle se réduit à

$$y - f(x, \theta_0) = J\delta + \varepsilon \rightarrow \hat{\theta}_b \neq \theta^*. \quad (15)$$

Le vecteur  $\hat{\theta}_b$ , estimé d'après le modèle (15), explique les résultats, mais sans tenir compte des biais. Les paramètres initialement phénoménologiques ne sont plus alors que des paramètres explicatifs sans véritable signification physique.

### 3.2. Evaluation des biais

La première indication précise que nous possédions porte sur le biais  $BL\theta$ . A la convergence de la procédure,

les incréments  $\delta_j$  sont très faibles et la linéarisation par rapport aux paramètres n'introduit plus alors aucun biais notable. Le critère retenu porte sur le rapport  $\delta_j/\theta_j$  qui doit être inférieur à une valeur fixée *EPS* pour chacun des paramètres

$$\delta_j/\theta_j < EPS, \quad j \in [1, p], \quad EPS = 10^{-3} - 10^{-5}. \quad (16)$$

Les tests classiques sur la somme des résidus et le test de Fisher ont été essayés. La vraie réponse  $\eta(x, \varphi)$  étant inconnue, on utilise le vecteur  $\hat{y}$  des réponses estimées à l'aide du modèle postulé

$$\hat{y} = f(x, \hat{\theta}). \quad (17)$$

Le vecteur des résidus, défini par

$$e = y - \hat{y}, \quad (18)$$

représente la quantité que le modèle postulé n'a pas été capable d'expliquer. L'importance d'un biais éventuel peut alors être évaluée par l'examen des résidus [19, 20]. En pratique, le test *SR* sur la somme des résidus, définie par

$$SR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i), \quad (19)$$

consiste à contrôler que la somme des résidus *SR* est faible et à vérifier la bonne répartition statistique des résidus de part et d'autre de la courbe  $f(x, \hat{\theta})$ . Sous cette forme, ce test nous a donné de bons résultats.

Le test de Fisher [21] s'est avéré inadapté. Aussi, nous écrivons que la somme des carrés des résidus est égale à la somme des carrés des erreurs aléatoires pures  $S_e$  et d'un terme complémentaire,  $S_b$ , lié au biais total,

$$SR^2 = S_e + S_b \quad (20)$$

et nous définissons le test de pertinence du modèle, rendant compte de la 'cohérence' entre modèle mathématique—système physique—résultats expérimentaux, par le rapport

$$C = \frac{SR^2}{S_e} \quad (21)$$

où

$$SR^2 = e'e = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (22)$$

$S_e$  est évalué à partir de la variance expérimentale  $s_e^2$  par la relation

$$S_e = n_e s_e^2 = \sum_{i=1}^{n_e} \left( \frac{y_{i1} - y_{i2}}{2} \right)^2. \quad (23)$$

$y_{i1}$  et  $y_{i2}$  sont les valeurs observées de  $y_i$  au cours de deux expériences distinctes, mais pour des valeurs identiques  $x_i$  de la variable indépendante  $x$ . Compte tenu de l'équation (20), *C* s'écrit

$$C = 1 + \frac{S_b}{S_e}. \quad (24)$$

Le test *COR*, basé sur l'examen de la matrice des

corrélations permet de contrôler la linéarité par rapport à  $x$ . L'élément  $COR_{jk}$  de cette matrice s'obtient en normalisant la matrice  $A = J'J$  d'éléments  $a_{jk}$

$$COR_{jk} = \frac{a_{jk}}{(a_{jj}a_{kk})^{1/2}}. \quad (25)$$

Dans l'espace métrique euclidien de dimension  $n$ , les  $j$ ème et  $k$ ème colonnes de  $J$  peuvent être considérées comme des vecteurs  $\xi_j, \xi_k$  de cet espace, formant un angle dont le cosinus est égal à  $COR_{jk}$ ,

$$COR_{jk} = \frac{\xi_j \xi_k}{\|\xi_j\| \|\xi_k\|} = \cos(\xi_j, \xi_k), \quad (26)$$

la colinéarité de ces deux vecteurs se traduit par la proportionnalité de leurs composantes sur chacun des axes  $i \in [1, n]$ . Cette condition est satisfaite pour toute fonction  $f(x, \theta)$  linéaire par rapport à  $x$ . Ainsi, la linéarité par rapport à  $x$  est d'autant meilleure que les valeurs de *COR* sont proches de l'unité ( $\pm 1$ ).

Le dernier test utilisé consiste en un plan de sélection des points expérimentaux (PSPE). Il s'agit de trouver, parmi un ensemble de points expérimentaux, le (ou les) sous-ensemble(s), nommé(s) plan(s) d'expérience, pour lequel (lesquels) il existe le meilleur accord avec le modèle présumé. Nous proposons une méthode d'examen exhaustif des données  $x_i, y_i$  dont le principe est le suivant. Nous estimons d'abord les paramètres en utilisant tous les points ( $i = 1, n$ ) du domaine opératoire. Puis, nous enlevons un point à l'une ou l'autre des extrémités du domaine, d'où deux estimations des paramètres. Nous enlevons ensuite deux points, soit deux points à l'une des extrémités, un point à l'une et un point à l'autre, deux points à la deuxième extrémité: d'où trois estimations. Pour chaque valeur de *NI* il y a balayage d'une extrémité à l'autre. La procédure continue jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un nombre de points fixés à l'avance (de 6 à 9 par exemple). A chacun des plans d'expérience ainsi définis, nous appliquons les tests *SR*, *C* et *COR* (Fig. 1).

Les cinq procédures de tests développées ci-dessus sont complémentaires:

(1) le test de convergence de la méthode de Gauss-Newton garantit la qualité de la linéarisation par rapport aux paramètres,

(2) le test *SR* permet de juger de la validité de l'hypothèse statistique, en particulier moyenne nulle et indépendance des erreurs,

(3) le test *C* donne une mesure du biais, indépendamment de la répartition statistique des erreurs,

(4) le test *COR* permet de contrôler la bonne linéarisation par rapport à  $x$ ,

(5) le PSPE permet enfin de sélectionner le plan d'expérience optimum pour lequel les tests précédents sont le mieux vérifiés.

Si ces tests sont satisfaits, le modèle est alors déclaré 'pertinent ou correct'.

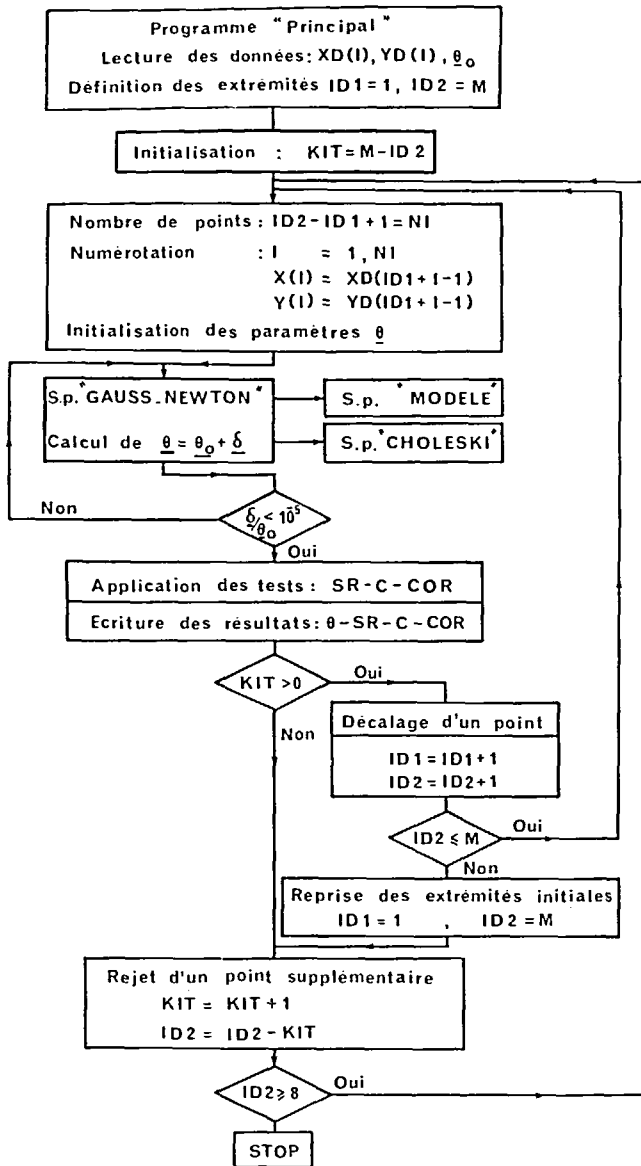


FIG. 1. Organigramme.

#### 4. MODELES ET SYSTEMES THERMOCINETIQUES

La difficulté fondamentale consiste à réaliser un bon accord entre les conditions postulées pour le modèle et celles existant effectivement sur le système physique, tout en satisfaisant un compromis acceptable entre un temps de calcul bref et une réalisation pratique aisée. A priori, nous avons recherché des modèles conduisant à des solutions analytiques explicites, afin de nous affranchir des erreurs de calculs induites par les discrétisations impliquées par les solutions implicites.

##### 4.1. Les modèles thermocinétiques

Pour les phénomènes étudiés, la fonction  $f(x, \theta)$  représentant le modèle est la solution  $T(\zeta, t, \theta)$  du

système d'équations

$$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (\zeta, t) \in \Omega \times [0, \infty], \quad (27a)$$

$$T(\zeta, 0) = T_0, \quad (\zeta, t) \in \bar{\Omega} \times [0], \quad (27b)$$

$$N_j(T) = \psi(\zeta, t), \quad j = 1, 2, 3; \quad (\zeta, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty], \quad (27c)$$

$$N_1(T) \equiv T; \quad N_2(T) \equiv \frac{\partial T}{\partial n}; \quad N_3(T) \equiv T + \frac{\lambda}{h} \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (27d)$$

$T$  désigne la température au temps  $t$ , en un point  $\zeta$ , dans le domaine  $\Omega$  homogène et isotrope, borné par sa frontière  $\partial\Omega$ . La validité de l'équation de la chaleur

implique des essais au cours desquels les écarts de température dans le matériau soient faibles, de sorte que la diffusivité  $a$  reste constante. Dans les composantes du vecteur  $\theta$ , doivent apparaître au moins deux des caractéristiques recherchées:  $\lambda, c, a, b$  et, éventuellement, des paramètres supplémentaires comme le coefficient d'échange  $h$ .

Nous avons choisi l'attaque thermique sinusoïdale, car, outre que la mesure de la température relative limite le biais, elle permet de satisfaire à certaines hypothèses statistiques. En effet, d'une part, la variable indépendante est alors la fréquence du signal qui peut être connue avec une grande précision, l'erreur aléatoire est donc faible, ce qui légitime l'hypothèse de Berkson; d'autre part, pour un échantillon de points pas trop grand, nous pouvons nous approcher de l'hypothèse de variance constante.

Pour les trois types de modèles utilisés, nous nous intéressons seulement au régime sinusoïdal établi. Le premier modèle, le plus simple, est le modèle unidimensionnel du mur semi-infini soumis à une densité thermique sinusoïdale sur sa face plane. La solution en tout point [8].

$$T(\zeta, t) = \frac{\phi}{2b\omega^{1/2}} \exp\left[-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} \zeta\right] \times \sin\left[\omega t - \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{1/2} \zeta - \frac{\pi}{4}\right] \quad (28)$$

fait apparaître deux caractéristiques thermiques: la diffusivité  $a = \lambda/\rho c$  et l'effusivité  $b = (\lambda\rho c)^{1/2}$ . Mais, les pertes thermiques sur le système expérimental peuvent dénaturer ce modèle. Nous avons alors utilisé un second modèle simple: le cylindre limité excité par un flux sinusoïdal sur une face plane et dont les autres faces sont à températures nulles. La solution en tout point [22]:

$$T = \frac{\phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[p_n(H-\zeta)] J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n \gamma_n \sin(p_n H)} \exp(j\omega t), \quad (29a)$$

$$J_0(\alpha_n \rho) = 0, \quad (29b)$$

$$p_n^2 + j \frac{\omega}{a} = -\alpha_n^2, \quad j^2 = -1, \quad (29c)$$

$$\gamma_n = 2\lambda p_n \cotg(p_n H) \quad (29d)$$

fait de nouveau apparaître deux caractéristiques: la diffusivité  $a$  et la conductivité thermique  $\lambda$ . Enfin, nous avons introduit un modèle plus général en remplaçant la condition de température nulle par une condition mixte. La solution en tout point s'écrit, en variables adimensionnelles [23]:

$$T(\zeta^*, r^*, t) = \frac{2\phi h}{\lambda^2} \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r^*) \left[ \text{ch } \delta_n(H^* - \zeta^*) + \frac{h_1^*}{\delta_n} \text{sh } \delta_n(H^* - \zeta^*) \right]}{\delta_n(h^{*2} + \alpha_n^2) J_0(\alpha_n) \left[ \text{sh } (\delta_n H^*) + \frac{h_1^*}{\delta_n} \text{ch } (\alpha_n H) \right]}, \quad (30a)$$

avec

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{\rho}, \quad H^* = \frac{H}{\rho}, \quad r^* = \frac{r}{\rho}, \quad h^* = \frac{h\rho}{\lambda}, \quad h_1^* = \frac{h_1\rho}{\lambda}, \quad (30b)$$

$$\alpha_n J_1(\alpha_n) - h^* J_0(\alpha_n) = 0, \quad (30c)$$

$$\delta_n^2 = \alpha_n^2 + j \frac{\omega}{a} \rho^2, \quad j^2 = -1. \quad (30d)$$

Dans ce modèle interviennent trois caractéristiques: la diffusivité  $a$ , la conductivité  $\lambda$  et le coefficient d'échange  $h$  (en prenant  $h = h_1$ ).

4.2. Les réalisations et les conditions expérimentales

Le schéma général du dispositif expérimental est représenté sur la Fig. 2. Le flux thermique est créé par effet Joule dans une feuille métallique. Un générateur très basse fréquence (TBF) délivre un signal sinusoïdal de très faible puissance qui pilote une alimentation continue programmable. Celle-ci se comporte comme un amplificateur de puissance débitant dans la résistance source. Cette résistance en alliage nickel-chrome, de dimensions  $40 \times 120 \times 0,025$  mm, est serrée entre les échantillons en son centre et entre les électrodes à ses extrémités. La surface effective de

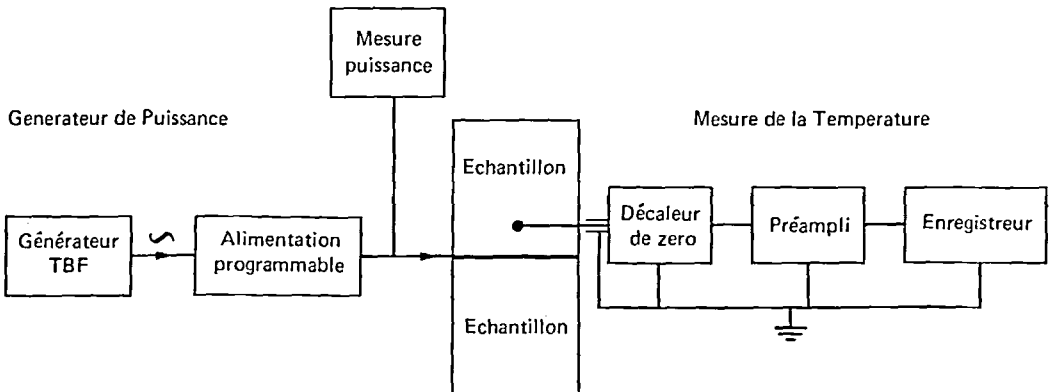


FIG. 2. Schéma général du dispositif expérimental.

chauffe est d'environ  $40 \times 40$  mm. L'amplitude maximum de la puissance fluctuante peut atteindre 8 W pour un courant variant entre 5 et 19 A et les variations de température à la surface des échantillons sont de l'ordre du degré.

Les échantillons, chauffés sur une de leurs faces planes, sont disposés symétriquement de part et d'autre de la source et peuvent être de deux types. Pour le type 1, ce sont des blocs parallélépipédiques de dimensions  $40 \times 40 \times 50$  mm, chauffés sur une de leurs faces carrées. Pour le type 2, ce sont des cylindres gardés. Le cylindre central, de cotes  $D = 25$  mm,  $H = 50$  mm, est entouré par un anneau de garde de même nature, de forme intérieure cylindrique  $D = 25,5$  mm et de forme extérieure parallélépipédique  $40 \times 40 \times 50$  mm. Entre les deux cylindres, il peut y avoir de l'air ou une mince feuille isolante.

L'enceinte de mesure est un caisson cubique en laiton. Le serrage des échantillons est assuré à l'aide d'une clé dynamométrique. La pression résultante sur la surface commune échantillons-source de  $16 \text{ cm}^2$  est de l'ordre de 90 bar. Cette pression permet d'assurer un bon contact thermique, ainsi qu'une bonne répétabilité des expériences. Des essais comparatifs dans la gamme 80–100 bar n'ont pas fait apparaître de différences notables sur les résultats. L'isolation thermique des échantillons peut être assurée sur les faces normales à la source par un isolant granulé.

La température au sein de l'échantillon est mesurée par un couple thermoélectrique nickel-chrome-nickel allié (normalisé type K) sous gaine en acier inoxydable. Le diamètre extérieur 0,34 ou 0,5 mm permet de réaliser un bon compromis entre un temps de réponse court, une résistance mécanique suffisante et la facilité de perçage des logements. Les plus faibles signaux recueillis sont de l'ordre de quelques microvolts. Aussi, la chaîne de mesure comprend-elle un préamplificateur continu de gain variable de  $10^3$  à  $10^6$ , suivi d'un enregistreur potentiométrique. L'essai harmonique de cette chaîne met en évidence une chute du gain vers 0,2 Hz, dans les conditions de nos essais.

La mesure de la densité de flux résulte des mesures de la puissance électrique consommée et de l'aire de la source. La mesure de la puissance est déduite de l'enregistrement simultané sur table traçante, de la tension et du courant (en réalité tension aux bornes d'un shunt).

La largeur du ruban métallique est mesurée au projecteur de profil et la distance entre électrodes au pied à coulisse. L'erreur relative sur la valeur de l'aire est inférieure à  $\pm 5 \times 10^{-3}$ . La position du thermocouple est également mesurée au projecteur de profil. Cette machine permet non seulement d'apprécier le micron, mais également de mesurer des angles au douzième de degré. A partir de ces mesures, le calcul fournit l'abscisse de l'axe du thermocouple avec une erreur absolue de  $\pm 0,025$  mm. L'incertitude sur la localisation exacte de la soudure chaude est du même ordre de grandeur.

Enfin, la valeur de la fréquence, fixée par le

générateur TBF, est connue à mieux que 3‰, comme en témoignent les contrôles effectués.

Afin d'isoler le biais modèle  $B_f$ , il faut que le biais de linéarisation par rapport aux paramètres  $BL\theta$  et le biais d'expérience  $BE$  soient négligeables. La linéarité par rapport aux paramètres sera respectée au voisinage de la convergence, dès que les incréments seront faibles ( $\delta/\theta < 10^{-3}$ ). En respectant la bande passante des amplificateurs, le biais sur la mesure de  $y$  peut être considérée comme nul et, par suite de la très faible erreur sur la mesure de la fréquence, le biais de mesure sur  $y$  induit par l'erreur sur  $x$  est encore négligeable.

Finalement, les seuls biais pouvant exister a priori, dans certains domaines de fréquence, sont les biais  $B_f$  sur le modèle phénoménologique et le biais transmis sur  $y$  par suite de la non linéarité en  $x$ . Le biais  $B_f$  porte essentiellement sur les conditions de surface.

## 5. LES MATERIAUX ESSAYES

La méthode d'estimation et les tests ci-dessus, écrits en FORTRAN IV, définissent la procédure d'estimation et d'analyse des résultats expérimentaux (PEARE). Celle-ci a été utilisée pour la détermination des caractéristiques thermiques d'un corps mauvais conducteur : le Plexiglass, et d'un métal : le fer Armco.

Pour chacun des deux systèmes thermiques décrits, les trois modèles concurrents sont comparés. Bien que nous sachions a priori que le modèle à température de surface nulle est incorrect, il a tout de même été utilisé pour confirmer la qualité de la procédure.

La variance expérimentale est évaluée, d'après l'équation (23), par duplication sur la mesure de la température. Les essais de duplication n'ont pas montré de différence supérieure à l'écart observé au cours de plusieurs périodes successives d'un même essai. Pour un modèle sans biais, la valeur issue du test  $C$  défini par l'équation (21) devrait être rigoureusement égale à 1. En réalité, même avec un modèle très faiblement biaisé,  $C$  pourra être supérieur ou inférieur à 1, selon que la variance expérimentale sera sous-estimée ou sur-estimée. L'intervalle  $C \in [0,5-2]$  nous a donné satisfaction.

### 5.1. Plexiglass

Le matériau utilisé est du Plexiglass ordinaire. Les échantillons sont des parallélépipèdes rectangles du type 1 ( $40 \times 40 \times 50$  mm). L'amplitude de la puissance sinusoïdale est voisine de  $0,04 \text{ W cm}^{-2}$ . Les faces non chauffées sont isolées par de la vermiculite. Le couple thermoélectrique dont la soudure chaude est à la masse a un diamètre de 0,5 mm. Il est situé sur l'axe normal à la face excitée à 4,2 mm de celle-ci. Trois séries d'essais ont été effectuées, au voisinage de  $40^\circ\text{C}$ , comportant respectivement 5, 9 et 14 couples fréquence-température entre 0,005 et 0,05 Hz.

En utilisant le modèle unidimensionnel, nous avons d'abord comparé, sur les deux premières séries d'essais, la procédure simple de Gauss-Newton où le vecteur  $\delta$  est obtenu en utilisant la méthode de Choleski et la

Tableau 1. Plexiglass : analyse complète des séries 2 et 3 avec le modèle unidimensionnel

<i>n</i>	$\Delta f$	$a \times 10^4$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$b \times 10^4$ ( $\text{J cm}^{-2} \text{°C}^{-1} \text{s}^{-1/2}$ )	$10^3 \text{ COR}$	$10^4 \text{ SR}$	$C = (\text{SR}^2/S_c)$
<i>Serie d'essais 2</i>						
9	0,005-0,025	11,130	627,72	986	2	2,82
8	0,005-0,022	11,121	627,26	987	0,6	2,81
8	0,006-0,025	11,230	634,00	987	1,9	3,35
7	0,005-0,018	11,104	626,45	988	1,3	2,77
7	0,006-0,022	11,223	633,63	988	2,5	3,39
7	0,008-0,025	11,023	619,94	991	3,4	4,33
<i>Serie d'essais 3</i>						
14	0,005-0,030	11,669	641,84	981	19	2,41
13	0,005-0,028	11,673	641,98	981	18,2	2,40
13	0,006-0,030	11,530	632,97	982	9,5	1,51
12	0,005-0,026	11,680	642,31	982	16,5	2,35
12	0,006-0,028	11,530	632,99	982	9,4	1,52
12	0,008-0,030	11,347	620,37	987	0,8	0,53
11	0,006-0,026	11,535	633,23	983	8,7	1,51
11	0,008-0,028	11,339	619,91	987	1,5	0,49
11	0,010-0,030	11,301	616,96	989	0,4	0,68
10	0,008-0,026	11,336	619,74	988	1,7	0,48
10	0,010-0,028	11,285	615,88	990	0,3	0,54
10	0,012-0,030	11,233	611,48	992	1,5	1,01
9	0,010-0,026	11,276	615,28	991	0,5	0,54
9	0,012-0,028	11,200	609,10	993	0,8	0,62
9	0,014-0,030	11,281	615,58	994	1	1,24
8	0,012-0,026	11,174	607,29	994	0,4	0,42
8	0,014-0,028	11,231	611,77	995	0,5	0,68
8	0,016-0,030	11,437	629,42	996	0,3	0,45

procédure de régression sélective [24]. Les résultats fournis par ces deux techniques sont absolument identiques. Cependant, la méthode de Gauss-Newton est environ quatre fois plus rapide, aussi, nous l'avons retenue dans la suite. Les résultats de l'application de la PEARE, incluant tous les critères, sont reportés dans le Tableau 1 pour les séries 2 et 3.

Nous observons que le respect des tests :

$$\text{COR} > 0,985; C \in [0,5-2]; \text{SR} \approx 10^{-4}$$

conduit à considérer l'essai 2 comme approché, car COR faible et C fort. Par contre, en respectant ces conditions, les valeurs de a et b fournies par la série 3 sont très voisines. Les résultats satisfaisant le mieux aux tests sont regroupés dans le Tableau 2, fournissant :

$$a = 11,30 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

avec une dispersion de  $\pm 0,5\%$ ,

$$b = 616 \times 10^{-4} \text{ J cm}^{-2} \text{ °C}^{-1} \text{ s}^{-1/2}$$

avec une dispersion de  $\pm 0,7\%$ .

A noter que les valeurs de a et b sont très légèrement décroissantes pour des fréquences croissantes.

Avec le modèle cylindrique à température de surface nulle, les résidus sont considérables, de l'ordre de  $10^3$  à  $10^4$  fois forts que ceux obtenus en modèle unidimensionnel, d'où des C énormes, de plusieurs milliers. Evidemment, les valeurs de a et b estimées sont mauvaises :  $a \sim 8 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ;  $b \sim 15 \times 10^{-4} \text{ J cm}^{-2} \text{ °C}^{-1} \text{ s}^{-1/2}$ . Ce modèle est à rejeter sans hésitation.

Le modèle cylindrique à conditions mixtes n'est adapté que pour des groupes limités de points (moins de dix points entre 0,008 et 0,024 Hz), situés à l'intérieur de la gamme de validité du modèle unidimensionnel, c'est-à-dire entre 0,005 et 0,030 Hz. Le COR est élevé (supérieur à 0,995), mais le test C variable (de 0,25 à 4). Pour les quelques cas où il y a convergence, les valeurs de a et λ sont très serrées, voir le Tableau 3 :

$$a = 11,48 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1};$$

$$\lambda = 21 \times 10^{-4} \text{ W cm}^{-1} \text{ °C}^{-1}$$

Tableau 2. Plexiglass : meilleurs tests de la série 3 en modèle unidimensionnel

Série	Nombre de points, n	$a \times 10^4$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$b \times 10^4$ ( $\text{J cm}^{-2} \text{°C}^{-1} \text{s}^{-1/2}$ )	$10^3 \text{ COR}$	$10^4 \text{ SR}$	C
3	12	11,347	620,37	987	0,8	0,53
3	11	11,301	616,96	989	0,4	0,68
3	10	11,233	611,48	992	1,5	1,01

Ecart maximum série :  $(\delta a/a) = \pm 0,5\%$ ;  $(\delta b/b) = \pm 0,7\%$ .

Tableau 3. Plexiglass : analyse en modèle cylindrique à condition mixte de la série d'essais 3

$n$	$\Delta f$	$a \times 10^4$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$\lambda \times 10^4$ ( $\text{W cm}^{-1} \text{°C}^{-1}$ )	$h \times 10^4$ ( $\text{W cm}^{-2} \text{°C}^{-1}$ )	$10^3 \text{ COR}$	$10^4 \text{ SR}$	$C = (\text{SR}^2/S_e)$
11	0,008-0,028	11,47	21,35	100	994	41	4,8
11	0,010-0,030	11,34	20,93	13	994	30	4
10	0,080-0,026	11,48	21,09	141	994	1,4	0,25
9	0,080-0,024	11,48	21,08	251	994	0,9	0,24
9	0,010-0,026	11,47	21,00	126	995	0,4	0,40

d'où

$$b = (\lambda^2/a)^{1/2} = 619,7 \times 10^{-4} \text{ J cm}^{-2} \text{°C}^{-1} \text{ s}^{-1/2}.$$

La valeur de  $a$  (resp.  $b$ ) est à 1,5% près (resp. 0,5%) celle trouvée avec le modèle unidimensionnel. Par contre, les valeurs de  $h$  varient fortement entre 13 et  $250 \times 10^{-4} \text{ W cm}^{-2} \text{°C}^{-1}$ . Compte tenu des grandes variations de  $C$  et  $h$  dans un intervalle de fréquence réduit, ce modèle n'est donc que 'partiel'.

Ainsi, pour un échantillon de Plexiglass parallélépipédique dans la gamme de fréquence utilisée  $f \in [0,005-0,05]$ , le modèle unidimensionnel convient parfaitement. Les analyses avec les modèles cylindriques, bien qu'approximatives, puisque la géométrie du modèle mathématique est cylindrique alors que celle du système physique réel est parallélépipédique, sont tout de même très significatives. Le modèle cylindrique à température de surface nulle est tout à fait incorrect, alors que celui à condition mixte s'avère 'partiellement correct' dans un intervalle de fréquence réduit.

## 5.2. Fer Armco

Les échantillons proviennent d'une barre de fer Armco laminé. Ce sont des cylindres gardés du type 2 ( $D$ : 25 mm,  $H$ : 50 mm). La densité de flux a une amplitude voisine de  $0,17 \text{ W cm}^{-2}$ . Le couple thermoélectrique de diamètre 0,34 mm est situé à l'abscisse 2,9 mm. Le signal recueilli est amplifié avec un

gain constant de 1000. La série d'essais, à la température de  $30 \text{°C}$ , comporte trente points entre 0,005 et 0,2 Hz et l'anneau de garde est isolé par de la vermiculite.

Les résultats de l'analyse en modèle unidimensionnel sont donnés par le Tableau 4 pour  $NI = 10$ . D'une façon générale, vers les fréquences basses, le décalage d'une fréquence, à  $NI$  fixé, entraîne de fortes variations de  $a$ ,  $b$  et  $C$  (pour  $C$ , le rapport des valeurs extrêmes est voisin de 100), tandis que, vers les fréquences hautes, le test  $COR$  n'est plus vérifié. Notons que ce modèle permet tout de même d'obtenir des valeurs approchées de la diffusivité comprises entre 0,17 et  $0,19 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

L'analyse en modèle cylindrique à condition mixte fait apparaître, pour des nombres de points  $NI$  décroissants, de une à trois régions, séparées par des frontières où la procédure diverge. Dans la région 1, les valeurs de  $a$ ,  $\lambda$  et  $h$  décroissent très légèrement pour des fréquences croissantes. Dans la région 2, les valeurs de  $a$  et  $\lambda$  croissent à partir de valeurs initiales plus faibles tandis que  $h$  décroît. Enfin, dans la région 3,  $a$  et  $\lambda$  restent faibles, alors que  $h$  est élevé: voir le Tableau 5.

Les valeurs obtenues pour des groupes de fréquences élevées correspondent à un  $C$  trop faible (de 0,05 à 0,3) et sont, de ce fait, à exclure. En effet, ceci indique un biais sur le modèle, car la linéarisation est très bonne ( $COR$  supérieur à 0,997). Ainsi, seule la première région correspondant aux plus basses fréquences fournit des

Tableau 4. Fer Armco : analyse avec le modèle unidimensionnel,  $n = 30$ ,  $NI = 10$ 

$\Delta f$	$a$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$b$ ( $\text{J cm}^{-2} \text{°C}^{-1} \text{s}^{-1/2}$ )	$10^3 \text{ COR}$	$10^4 \text{ SR}$	$C = (\text{SR}^2/S_e)$
$f < 0,9$	Matrice non inversible				
0,009-0,020	6,8633	1,8380	992,7	0,02	7,43
0,010-0,022	1,0797	1,7740	992,7	0,06	6,57
0,011-0,025	0,4419	1,7129	992,3	0,07	4,85
0,012-0,027	0,2761	1,6662	991,7	0,01	2,07
0,013-0,030	0,2885	1,6730	991,0	0,08	1,86
0,014-0,032	0,2243	1,6417	990,6	0,06	0,47
0,015-0,035	0,1989	1,6254	990,3	0,06	0,35
0,016-0,040	0,1857	1,6147	990,1	0,03	0,17
0,018-0,045	0,1789	1,6086	990,3	0,02	0,15
0,020-0,050	0,1708	1,6007	990,2	0,02	0,16
0,022-0,060	0,1622	1,5916	989,4	0,04	0,31
0,025-0,070	0,1654	1,5946	988,3	0,03	0,69
0,027-0,080	0,1681	1,5975	986,5	0,05	0,83
0,030-0,10	0,1739	1,6048	984,2	0,06	0,81
0,032-0,12	0,1763	1,6077	981,2	0,08	0,92
0,035-0,15	0,1764	1,6084	978,4	0,01	0,99
0,040-0,20	0,1744	1,6055	975,5	0,01	1,15



Tableau 5. Fer Armco : analyse avec le modèle cylindrique à condition mixte pour  $NI = 12$

$n$	$\Delta f$	$a$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$\lambda$ ( $\text{W cm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )	$h$ ( $\text{W cm}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )	$10^3 \text{ COR}$	$10^4 \text{ SR}$	$C = (\text{SR}^2/S_c)$
12	0,005–0,016	0,2054	0,7371	0,0124	998,0	0,6	1,84
12	0,006–0,018	0,2001	0,7279	0,0116	998,2	2,8	1,84
12	0,007–0,020	0,1980	0,7243	0,0111	997,3	0,3	1,87
12	0,008–0,022		Matrice non inversible				
12	0,009–0,025	0,1923	0,7128	0,0170	996,9	1,4	0,31
12	0,010–0,027	0,1943	0,7170	0,0128	996,5	0,6	0,31
12	0,011–0,030	0,1973	0,7161	0,0052	996,2	0,3	0,30
12	0,012–0,032		Matrice non inversible				
12	0,013–0,035		Matrice non inversible				
12	0,014–0,040	0,1757	0,6763	0,0250	998,4	0,5	0,07
12	0,015–0,045	0,1688	0,6602	0,0312	998,6	0,07	0,07
12	0,160–0,050	0,1571	0,6325	0,0408	998,8	0,2	0,09
12	0,018–0,060	0,1432	0,5983	0,0571	998,7	0,2	0,11
12	0,020–0,070	0,1609	0,6417	0,0383	992,2	0,03	0,33
12	0,020–0,080	0,1678	0,6578	0,0285	999,4	0,18	0,48
12	0,025–0,100	0,1759	0,6289	0,0029	999,4	1,1	0,71
12	0,027–0,120		Matrice non inversible				
12	0,030–0,150		Matrice non inversible				
12	0,032–0,200		Matrice non inversible				

tests satisfaisants. Nous observons pour celle-ci que, lorsque le nombre  $NI$  de points diminue, les valeurs de  $a$  et  $\lambda$  augmentent,  $h$  restant sensiblement constant, le  $COR$  augmente et la valeur de  $C$  passe par un minimum. Les Tableaux 5–7 résumant les résultats de l'analyse pour  $NI \in [6, 30]$ . Les meilleurs tests sont obtenus pour des  $NI \in [10–14]$ . Nous retenons au voisinage de  $C_{\min} \sim 1,7$  et  $COR \sim 0,998$ :

$$a = 0,201 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

avec une dispersion de  $\pm 1,5\%$ ,

$$\lambda = 0,730 \text{ W cm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

avec une dispersion de  $\pm 1\%$ ,

$$h = 0,0124 \text{ W cm}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

avec une dispersion de  $\pm 6\%$ .

D'une façon générale, nous observons une forte sensibilité des valeurs des paramètres à la valeur du  $COR$ . Un  $COR$  faible donnant des valeurs de  $a$  et  $\lambda$

faibles, mais une valeur de  $h$  très forte et inversement. Pratiquement, la valeur du  $COR$  fixe la valeur de  $a$  quel que soit le nombre  $NI$  de points considérés (voir le Tableau 7). Nous avons également observé que, lorsque les fréquences basses sont éloignées, les plus basses d'entre elles fixent pratiquement les valeurs des paramètres et, à  $NI$  fixé, ces dernières croissent en même temps que le  $COR$ , lorsque la fréquence basse augmente. Le resserrement des fréquences a pour effet de contre-balancer cette croissance de  $a$ ,  $\lambda$  et  $COR$ . Pour ces essais, les fréquences doivent être serrées afin de garantir un  $COR$  élevé (supérieur à 0,99) et, par suite, une bonne linéarisation par rapport à la fréquence.

Dans cette série d'essais, le système physique et le modèle ont la même géométrie cylindrique et la condition de surface est approchée par la condition mixte. L'application de la PEARE conduit à rejeter le modèle unidimensionnel, bien qu'il donne déjà des valeurs approchées des caractéristiques thermiques. Quelques analyses en modèle cylindrique à tempéra-

Tableau 6. Fer Armco : analyse avec le modèle cylindrique à condition mixte

$n$	$\Delta f$	$a$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$\lambda$ ( $\text{W cm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )	$h \times 10^4$ ( $\text{W cm}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )	$10^3 \text{ COR}$	$10^4 \text{ SR}$	$C = (\text{SR}^2/S_c)$
30	0,005–0,020	0,1934	0,7176	128,0	994	13,9	2
28	0,005–0,12	0,1941	0,7192	128,5	994	15	2
26	0,005–0,08	0,1947	0,7187	128,1	995	5,9	1,82
24	0,005–0,06	0,1953	0,7197	128,4	995	3,8	1,80
22	0,005–0,045	0,1965	0,7220	128,7	995,4	0,0007	1,62
20	0,005–0,035	0,1970	0,7228	128,7	995,8	0,7	1,64
18	0,005–0,030	0,1979	0,7244	128,7	996,3	1,8	1,63
16	0,005–0,025	0,1987	0,7259	128,6	997	2,3	1,64
14	0,005–0,020	0,2009	0,7298	127,6	997,6	3,9	1,70
12	0,005–0,016	0,2053	0,7371	123,9	998,0	0,7	1,83
10	0,005–0,014	0,2059	0,7380	123,1	997,9	0,5	2,19
8	0,005–0,012	0,2107	0,7455	114	997,3	0,8	2,53
6	0,005–0,010	0,2323	0,7769	75	995,3	0,09	2,91

Tableau 7. Fer Armco : analyse avec le modèle cylindrique à condition mixte; meilleurs tests

$n$	$\Delta f$	$a$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$\lambda$ ( $\text{W cm}^{-1} \text{°C}^{-1}$ )	$h$ ( $\text{W cm}^{-2} \text{°C}^{-1}$ )	$10^3 \text{COR}$	$10^4 \text{SR}$	$C = (\text{SR}^2/S_e)$
16	0,005-0,025	0,1987	0,7259	0,0128	997,0	2,3	1,64
16	0,006-0,027	0,1968	0,7220	0,0113	996,0	1	1,59
16	0,007-0,030	0,1960	0,7208	0,0105	995,0	2	1,69
14	0,005-0,020	0,2009	0,7298	0,0127	997,6	3,9	1,70
14	0,006-0,022	0,1972	0,7228	0,0114	996,9	1	1,63
14	0,007-0,025	0,1963	0,7214	0,0106	995,8	3,8	1,73
12	0,005-0,016	0,2054	0,7371	0,0124	998,3	0,6	1,83
12	0,006-0,018	0,2000	0,7279	0,0115	998,2	2,7	1,84
12	0,007-0,020	0,1980	0,7243	0,0111	997,1	0,3	1,87
10	0,005-0,014	0,2059	0,7380	0,0123	997,9	0,5	2,19
10	0,006-0,016	0,2022	0,7315	0,0117	999,0	3,4	2,15
10	0,007-0,018	0,2037	0,7341	0,0122	998,0	0,7	2,14

ture de surface nulle ont confirmé l'inadaptation de ce modèle.

Avec le modèle cylindrique à condition mixte, les résultats sont très satisfaisants. La valeur très élevée de  $h$  s'explique par le fait que, sur la frontière de l'échantillon, il n'existe pas une véritable condition mixte. Il faudrait en réalité résoudre un problème thermique bien plus complexe faisant intervenir, selon le type d'échantillon, la vermiculite environnante ou l'air et l'anneau de garde. Cependant, pour la détermination des caractéristiques intrinsèques  $a$  et  $\lambda$ , le modèle cylindrique à condition mixte est suffisamment adapté, comme en témoignent les divers tests, et les valeurs obtenues sont en bon accord avec celles de la littérature [25]. Quant aux divergences de la procédure observées au cours du PSPE, elles nous paraissent imputables à une insuffisance de l'hypothèse sur le coefficient d'échange  $h$  supposé constant quelle que soit la fréquence.

## 6. CONCLUSION

La procédure développée permet l'estimation simultanée des caractéristiques thermophysiques. Son intérêt essentiel réside dans le fait que l'on ne 'force' pas l'identification entre le système réel et son modèle phénoménologique, mais que l'on recherche, grâce à une série de tests appropriés, le modèle 'pertinent'. Les divers résultats montrent que la source d'erreur la plus forte provient précisément des conditions aux limites définissant le modèle.

Cette procédure s'est révélée efficace pour divers couples système-modèle. Pour le modèle à condition mixte, il apparaît une influence de la fréquence sur la valeur du coefficient d'échange. Cette influence devra être prise en compte dans un modèle plus général.

Avec un autre type d'excitation thermique (créneau, flash), les principes exposés restent toujours exacts, à condition de tenir compte de la structure particulière des erreurs qui ne sont plus indépendantes, mais, par exemple, autocorrélées.

## BIBLIOGRAPHIE

1. R. P. Tye, The art of measuring thermal conductivity, *Instrum. Technol.* 16, 45-51 (1969).
2. A. J. Walter, R. M. Dell and P. C. Burgess, The measurement of thermal diffusivities using a pulse electron beam, *Rev. Int. Hautes Temp. Réfract.* 7, 271-277 (1970).
3. G. Weill, Appareillages de mesure de la conductivité thermique des semi-conducteurs, *J. Phys. Radium* 23, 15A-20A (1962).
4. J.-C. Perron, Mesure des conductivités thermiques en régime variable, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* 252, 2867-2869 (1961).
5. J. H. Becker, Several new methods to measure the thermal diffusivity of semi-conductors, *J. Appl. Phys.* 31, 612-613 (1960).
6. A. B. Thimberlake, P. W. Davis and T. S. Shilliday, Thermal diffusivity measurements on small samples, *Adv. Energy Conv.* 2, 45-51 (1962).
7. L.-P. Filippov, Methods of simultaneous measurement of heat conductivity, heat capacity and thermal diffusivity of liquid metals at high temperatures, *Int. J. Heat Mass Transfer* 9, 681-691 (1966).
8. J.-C. Champoussin, Détermination simultanée des caractéristiques thermocinétiques des solides par une méthode de régime variable, *Int. J. Heat Mass Transfer* 15, 1407-1418 (1972).
9. O. Krischer und H. Esdorn, Einfaches Kwizzeitverfahren zur gleichzeitigen Bestimmung..., *VDI Forsch.* 450, 28-39 (1955).
10. K. Katayama, K. Ohuchi and S. Kotakes, A transient method of simultaneous measurement of thermal properties using a plane heat source, *Bull. JSME* 12, 865-872 (1969).
11. J. A. Cape and G. W. Lehman, Temperature and finite pulse-time effects in the flash method for measuring thermal diffusivity, *J. Appl. Phys.* 34, 1909-1913 (1963).
12. J. V. Beck, The optimum analytical design of transient experiments for simultaneous determinations of thermal conductivity and specific heat, Ph.D. Thesis, Michigan State University (1964).
13. R. C. Pfahl and B. J. Mitchel, A general method for simultaneous measurement of thermal properties, AIAA Paper No. 69-602, 4th Thermophysics Conference. San Francisco (1969).
14. B. Clark, An experimental and analytical investigation of Teflon ablation heat transfer parameters by the method of non linear estimation, Ph.D. Thesis, Cornell University (1970).
15. M. J. Box and N. R. Draper, Factorial designs, the  $|X'X|$  criterion, and some related matters, *Technometrics* 13, 731-742 (1971).
16. J. W. Green, Experimental designs for approximating response relationships and detecting models inadequacies, Ph.D. Thesis, University of Kentucky (1973).
17. M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics* (3rd edn), Vol. 2. London (1973).

18. J. Berkson, Are there two regressions, *J. Am. Statist. Ass.* **45**, 164–180 (1950).
19. N. R. Draper and H. Smith, *Applied Regression Analysis*. John Wiley, New York (1966).
20. F. J. Anscombe, Examination of residuals, in *Proc. 4th Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1, pp. 1–36 (1961).
21. G. E. P. Box and G. A. Coutie, Application of digital computers in the exploration of functional relationship, *Proc. Instn Electr. Engrs* **103**, 100–107 (1956).
22. J.-C. Champoussin, Cylindre de révolution en régime thermique sinusoïdal établi, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **272**, 705–708 (1971).
23. C. Saint-Blanquet, B. Fourcher et J.-P. Bardon, Etude des champs thermiques permanents ou sinusoïdaux dans un cylindre limité, *Entropie* **38**, 14–22 (1971).
24. R. I. Jenrich and P. F. Sampson, Application of stepwise regression to non linear estimation, *Technometrics* **10**, 63–72 (1968).
25. Y. S. Touloukian, *Thermophysical Properties of Matter*, Vol. 10, p. 83. I.F.I. Plenum, New York (1973).

#### ON THE PERTINENCE OF HEAT TRANSFER CONDUCTION MODELS AND THE ESTIMATION OF THEIR THERMAL PROPERTIES

**Abstract**—Analysis of previous works shows that the greatest limitation in thermal metrological methods lies in the inadequacy of the 'postulated' phenomenological model to the real physical system. A procedure for the solution of the double problem of the estimation and pertinence of the model is proposed. Non-linear estimation gives the values of the thermal properties simultaneously while a series of complementary tests control the bias. Several system-model couples are described and tested. The three models examined have in common a sinusoidal flux condition on one face. The procedure is applied with success to the determination of the thermophysical properties of plexiglass and Armco Iron.

#### ÜBER DIE EIGNUNG VON WÄRMETRANSPORTMODELLEN UND DIE ABSCHÄTZUNG IHRER THERMISCHEN EIGENSCHAFTEN

**Zusammenfassung**—Eine Analyse früherer Arbeiten zeigt, daß die stärkste Einschränkung bei der Anwendung von thermischen metrologischen Verfahren in der Unzulänglichkeit der "postulierten" phänomenologischen Modelle gegenüber dem realen physikalischen System liegt. Ein Verfahren wird vorgeschlagen, das es ermöglicht, das zweifache Problem von Abschätzung der thermischen Eigenschaften und der Eignung des Modells zu lösen. Die nichtlineare Abschätzung ergibt die Werte der thermischen Eigenschaften, während gleichzeitig eine Serie von Komplementärtests es ermöglicht, die Abweichungen zu kontrollieren. Einige Paare System—Modell werden beschrieben und getestet. Gemeinsam ist den drei Modellen eine sinusförmige Flußbedingung auf einer Seite. Das Verfahren wird mit Erfolg zur Bestimmung der thermo-physikalischen Eigenschaften von Plexiglas und Armco-Eisen angewandt.

#### О СПРАВЕДЛИВОСТИ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ОЦЕНКЕ ИХ ТЕПЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

**Аннотация**—Анализ предыдущих работ показывает, что наиболее сильным ограничением теплофизических метрологических методов является несовпадение принимаемой феноменологической модели и реальной физической ситуации. Предложен метод, позволяющий оценивать как характеристики, так и справедливость модели. С помощью нелинейной оценки можно одновременно определять значения тепловых характеристик, а с помощью серии дополнительных опытов контролировать отклонения.

Описано несколько пар система—модель и проведена их экспериментальная проверка. В рассмотренных трех моделях имеет место общее условие синусоидального потока на одной из поверхностей. Метод успешно применен для определения теплофизических характеристик плексигласа и армо-железа.